764. 確率法則ノ分解問題, VIII

北川　敏男（阪大）

§9. $\underline{\mathbb{K}_{\rho}^{*n}}$〔$\mathcal{L}$〕ニ於ケル$\mathcal{L}$ノ分解問題　VI及ビVIIニ於テ述ベタ安定ナ確率法則ノ概念ノ当然ナル一ツノ発展トシテLévyハ半安定ナ（semi-stable）確率

法則[1]トイフ概念ヲ導入シタ。茲デハコレヲ或特殊領域ニ於ケル分解問題トシテ眺メテ見ヨウト思フ。

ソノタメ次ノ様ナ準備ヲスル。函数 $\rho(x, y)$ ハ次ノ様ナ三性質ヲモツトスル：

(i) $\rho(x, y)$ ハ，$x>0$，$y>0$ ニテ定義セラレ、各変数ニ関シテ純単調増加デアル。

(ii) $x>0$ $(y>0)$ ナラバ $\rho(x, y)>y$ $(\rho(x, y)>x)$

(iii) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$，即チ對稱。

カヽル ρ ニ関シテ次ノ様ナ正数ノ集合ヲ導入スル：

$\mathfrak{M}(a_1, a_2; \rho)$： コレハ豫メ與ヘラレタ二ツノ正数 a_1, a_2 並ビニ上述ノ如キ函数 ρ ニ関シテ、次ノ如ク定義サレル正数全体ノ集合デアル。

$$\begin{cases} \text{(i)} & a_i \in \mathfrak{M}(a_1, a_2; \rho) \quad (i=1,2) \\ \text{(ii)} & b \in \mathfrak{M}(a_1, a_2; \rho) \text{ ナラバ} \\ & \qquad \rho(b, a_i) \in \mathfrak{M}(a_1, a_2; \rho) \quad (i=1, 2) \end{cases}$$

次ニ或ル任意ノ確率法則 $\mathcal{L}$ ト上述ノ正数ノ集合 $\mathfrak{M}(a_1, a_2; \rho)$ トニ関シテ確率法則ノ集合 $K_\rho^{*2}[\mathcal{L}]$ ヲ定義スル：

$K_\rho^{*2}[\mathcal{L}]$： 確率法則 $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_1$ ニ對應スル分布函数ヲ夫々 $F(x)$, $F_1(x)$ トスル。$F_1(x)=F(bx)$，但シ $b \in \mathfrak{M}(a_1, a_2; \rho)$ トナルヤウナ $\mathcal{L}_1$ ノ全体ノ集合（場合ニ依ッテハソノ様ナ $F_1(x)$ 全体ノ集合ト云ッテモ間違ヲ生ズル心配ハナイ）ヲ $K_\rho^{*2}[\mathcal{L}]$ デ表ハスコトニスル。茲ニ * ヲツケタノハ，前回並ビ前々回 $K[\mathcal{L}]$ ニ對シテ

---

(1) Lévy ノ書： §58 Lois semi-stables (p. 204—208)

$\mathbb{K}^*[\mathcal{L}]$ ヲ考ヘタ如ク *homogeneous linear* ナ *transformation* ニ限ルコトヲ示シ，又 ρ ト $\mathfrak{Z}$ トハ二変数ノ函数 ρ ヲ基礎ニトルコトヲ示スノデアル。勿論 a_1, a_2 ヲ與ヘテ始メテ $\mathfrak{Z}$ ー集合ハ確定スルノデアルガ便宜上コレヲ書クコトハ省略シタ。

以上ノ定義カラ明カニ（VI 及ビ VII 参照）

(1) $\mathbb{K}_\rho^{*2}[\mathcal{L}] \subset \mathbb{K}^*[\mathcal{L}] \subset \mathbb{K}[\mathcal{L}]$

以上ノ考ヘヲ拡張シテ、二変数ノ函数 $\rho(x, y)$, 正数ノ集合 $\mathfrak{Z}(a_1, a_2; \rho)$ 及ビ $\mathbb{K}_\rho^{*2}[\mathcal{L}]$ ノ代リニ、夫々

$$
(2)\begin{cases}
\rho(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) & n\text{ 変数ノ函数} \\
\mathfrak{Z}(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n; \rho) & \text{正数ノ集合} \\
\mathbb{K}_\rho^{*n}[\mathcal{L}] & \text{確率法則ノ集合}
\end{cases}
$$

ヲ導入スルコトガ出来ル。ソノ方法ハコヽニ繰返シ述ベル必要ハナカロウ。

サテ吾々ハ $\underline{\mathbb{K}_\rho^{*2}[\mathcal{L}]}$ <u>ニ於ケル $\mathcal{L}$ ノ分解問題</u>ト云フモノヲ考ヘテ見ヨウ。

$\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ ハ相互ニ独立デ且ツ共ニ同ジ $\mathcal{L}$ ナ確率法則ニモツ確率変数トスル。然ルトキヤハリ $\mathcal{L}$ ヲ確率法則ニモツ確率変数 $\mathfrak{X}$ ヲ適當ニトレバ

(3) $\quad a_1\mathfrak{X}_1 + a_{2}\mathfrak{X}_2 = \rho(a_1, a_2)\mathfrak{X}$

ナル関係ガ成立ツト假定ショウ。シカラバカヽル $\mathcal{L}$ 従ツテソノ分布函数 $F(x)$（或ハ特性函数 $f(t)$ デモヨイガ）ハ如何ナル形ノモノカト云フ問題ガ起ルデアロウ。

コノ問題ハ少シ考ヘテ見レバ容易ニ分ルヤウニ，函数 ρ,

正数 a_1, a_2 ガ豫メ與ヘラレタトキ）$\mathbb{K}^{*2}_{\rho}[\mathcal{L}]$ ガ分解可能デアル樣ナ $\mathcal{L}$ ハ如何ナルモノカト云フ問題ニナルノデアル。

同樣ニシテ $\mathbb{K}^{*n}_{\rho}[\mathcal{L}]$ ニ於ケル分解問題ニ關シテハ

$$(4)\quad a_1\mathbb{X}_1 + a_2\mathbb{X}_2 + \cdots\cdots + a_n\mathbb{X}_n = \rho(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)\mathbb{X}$$

ナル確率変數間ノ關係ニ依ッテ規定セラレル $\mathcal{L}$ ガ問題ニナルデアロウ。茲ニ勿論 $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, \cdots\cdots, \mathbb{X}_n$ ハ相互ニ独立デ且ツ、各々ハ $\mathbb{X}$ ト同ジク，同ジ $\mathcal{L}$ ナル確率法則ニ從フ確率変數デアルトスル事ハ言フ迄モナイ。

VI 及ビ VII デ論ジタ $\mathbb{K}^{*}[\mathcal{L}]$ ニ於ケル分解問題ニ於テハ，a_1, a_2 ハ任意ノ正數ヲ動キ得ルトシテ（3）ヲ解イタノデアルガ，$\mathbb{K}^{*2}_{\rho}[\mathcal{L}]$ デ意味スル（3）ノ a_1, a_2 ハ豫メ與ヘラレタ只一組ノ値シカ意味シナイノデアル。一般ニ $\mathbb{K}^{*n}_{\rho}[\mathcal{L}]$ ニ於テモ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ハ同樣ニ與ヘラレタ只一組ニ限ルノデアル。

<u>$\mathbb{K}^{*n}_{\rho}[\mathcal{L}]$ ニ於ケル分解問題ハ未ダ全面的ナ解決ニ到達シテ居ラナイ樣デアル。</u>

ソコデ此処ニハ，コノ問題ヘノ一ツノ<u>部分的ナ解答</u>ヲ與ヘルモノトシテ<u>半安定ナ確率法則</u>ヲ簡単ニ述ベルニ止メヨウ：

特性函數ノ對數 $\psi(t)$ ガ或ル一ツノ $q\ (q \neq 0, 1)$ ニ對シテ

$$(5)\quad \psi(tq) = q^{\alpha}\psi(t) \qquad (-\infty < t < \infty)$$

ヲ満足スルトキ，カヽル特性函數ヲ確率法則ニスルモノヲ

半安定ナリトイフ。$q>1$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ。ソノトキ必然的ニ $\alpha>0$ トナル。

(6) $\quad Q=q^{\alpha}$

ト置ク。

〔1〕 今若シモ

(7) $\quad Q^{-m}+Q^{-m'}=1$

トナル様ナ整数 m, m' ガアルナラバ

(8) $\quad \psi(tq^{-m})+\psi(tq^{-m'})=(Q^{-m}+Q^{-m'})\psi(t)=\psi(t)$

トナル。即チ

(9) $\quad q^{-m}=a_1,\ \ q^{-m'}=a_2,\ \ \rho(a_1, a_2)=1$

トナクナラバ $\exp\psi(t)\equiv f(t)$ ニ関シテハ

(10) $\quad f(a_1 t)f(a_2 t)=f(\rho(a_1, a_2)t)$

トナル。サテ (10) ハ (3) ト同ジ内容デアル。

〔2〕 次ニ若シモ

(11) $\quad Q^{-m_1}+Q^{-m_2}+\cdots\cdots+Q^{-m_n}=1$

ナル様ナ整数 $(m_1, m_2, \cdots\cdots, m_n)$ ガアレバ，全ク同様ニシテ (4) ト同ジ内容タル

(12) $\quad f(a_1 t)f(a_2 t)\cdots\cdots f(a_n t)$

$$=f(\rho(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)t)$$

ニ到達スルコトヲ見ルノデアル。但シ茲ニ

(13) $\quad q^{-m_i}=a_i\ \ (i=1, 2, \cdots\cdots\cdots, n),$

$$\rho(a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots, a_n)=1$$

ソコデ函数方程式 (5) ヲ解クコトガ吾々ノ問題解決ノタメノ一ツノ示唆ヲ與ヘル事ニナルノヲ見ル。

<u>函数方程式(5)ノ解法</u>: 無限ニ分解可能ナ確率法則ノ概念ガ如何ニ有力ナモノデアルカ、又確率法則ノ分解トイフ一見代数的ナ問題ガ如何ニ深ク確率変数列ノ *Limit process* ニ関係シテクルカ —— 何レモ既ニ屢々見タ所デアルガ —— ヲ例示スル意味ニ於テ函数方程式(5)ノ解法(*Lévy loc. cit.*)ハ誠ニ興味深イ。今回ハ問題ノ説明ヲ主眼トシタタシ、以下ノ議論ニ引用シナイ結果デモアルカラ、コヽニ紹介スルコトハ止メルコトニスル。